algebra

Binaire operator $\oplus$ heeft *eenheidselement* e betekent: $x\oplus\mathsf{e} = x$ en ook $\mathsf{e}\oplus x = x$, voor alle x. Operator $\otimes$ heeft *nulelement* n betekent: $x\otimes\mathsf{n} = \mathsf{n}$ en ook $\mathsf{n}\otimes x = \mathsf{n}$, voor alle x. Operator $\oplus$ is *idempotent* betekent: $x\oplus x = x$, voor alle x. De begrippen *commutatief* en *associatief* worden bekend verondersteld. Operator $\otimes$ *distribueert over* $\oplus$ betekent: $x\otimes(y\oplus z) = (x\otimes y)\oplus(x\otimes z)$, voor alle x, y, z.

een tabelletje

operator	eenheid	nulelement	idempotent?	distr. over	quantor
$\wedge$	true	false	ja	$\vee$	$\forall$
$\vee$	false	true	ja	$\wedge$	$\exists$
$+$	0	(geen)	nee	max, min	Σ
$*$	1	0	nee	$+$	Π
min	$+\infty$	$-\infty$	ja	max	min
max	$-\infty$	$+\infty$	ja	min	max

In handgeschreven teksten worden voor de operatoren max en min ook wel $\uparrow$ en $\downarrow$ gebruikt.

quantoren

Uitgangspunt: operator $\oplus$ is commutatief, associatief en heeft eenheidselement e. Bij iedere zulke operator definiëren we een quantor, die we hier aangeven met $\underline{\oplus}$. De algemene vorm van een gequantificeerde formule (met één dummy) is:

$$(\underline{\oplus} i : P : F) \ .$$

Hierin is i de *gebonden variabele*, ook wel *dummy* genoemd, is P een predikaat (waarin i) mag voorkomen, genoemd *het domein(predikaat)* of *de domeinexpressie*, en is F een expressie (waarin i mag voorkomen) van het type van $\oplus$, genoemd *de term* van de quantificatie.
Voor formules met quantoren gelden de volgende algemene regels; aan sommige regels zijn extra voorwaarden verbonden:

leeg domein: $(\underline{\oplus} i : \mathsf{false} : F) = \mathsf{e}$

eenpuntsregel: $(\underline{\oplus} i : i = E : F) = F(i := E)$

domeinsplitsing: $(\underline{\oplus} i : P\vee Q : F) = (\underline{\oplus} i : P : F)\oplus(\underline{\oplus} i : Q : F)$, mits:
operator $\oplus$ idempotent is of P en Q disjunt zijn (dat wil zeggen: $[\, P\wedge Q \equiv \mathsf{false}\,]$).

distributie: $(\underline{\oplus} i : P : x\otimes F) = x\otimes(\underline{\oplus} i : P : F)$, mits:
operator $\otimes$ distribueert over $\oplus$ en: e is tevens het nulelement van $\otimes$ of het domein is niet leeg (dat wil zeggen: P verschilt van false).

let op: In de distributieregel mag x een willekeurige expressie zijn, als de dummy i er maar niet in voorkomt: men kan geen dummy "buiten haakjes halen"!

de telquantor

De telquantor $\#$ is een beetje een buitenbeentje: hij is niet afgeleid van een binaire operator, althans niet rechtstreeks. De telquantor wordt gedefinieerd met behulp van een hulpfunctie *num*, die de booleans afbeeldt op getallen, als volgt:

$$num\cdot\mathsf{false} = 0 \quad\text{en}\quad num\cdot\mathsf{true} = 1 \ .$$

Nu definiëren we, waarbij zowel P als R predikaten zijn:

$$(\# i : P : R) = (\Sigma i : P : num\cdot R) \ .$$

Uit deze definitie en de algemene quantorregels kunnen de rekenregels voor $\#$ worden afgeleid:

leeg domein: $(\# i : \mathsf{false} : R) = 0$

eenpuntsregel: $(\# i : i = E : R) = 0$, als $\neg(R(i := E))$
$(\# i : i = E : R) = 1$, als $R(i := E)$

domeinsplitsing: $(\# i : P\vee Q : R) = (\# i : P : R) + (\# i : Q : R)$, mits:
P en Q disjunt zijn (dat wil zeggen: $[\, P\wedge Q \equiv \mathsf{false}\,]$).

dummytransformatie

We geven hier alleen een regel voor de meest voorkomende, eenvoudigste vorm van wat *dummytransformatie* wordt genoemd:

$$(\underline{\oplus} i : 1\leq i < n+1 : F) = (\underline{\oplus} i : 0\leq i < n : F(i := i+1)) \ .$$

termafsplitsing

Als $0\leq n$ – dit is echt nodig! – dan gelden:

$$[\, 0\leq i < n+1 \equiv 0\leq i < n \vee i = n \,] \text{ en: } [\, 0\leq i < n+1 \equiv 0 = i \vee 1\leq i < n+1 \,] \ .$$

Hieruit kunnen nu, door toepassing van domeinsplitsing en de eenpuntsregel, de volgende regels worden afgeleid voor zogenaamde *termafsplitsing*; toepassing van deze regels vereist dus $0\leq n$:

termafsplitsing: $(\underline{\oplus} i : 0\leq i < n+1 : F) = (\underline{\oplus} i : 0\leq i < n : F)\oplus F(i := n)$

termafsplitsing: $(\underline{\oplus} i : 0\leq i < n+1 : F) = F(i := 0)\oplus(\underline{\oplus} i : 0\leq i < n : F(i := i+1))$

Voor de telquantor ziet de regel voor termafsplitsing er zó uit:

termafsplitsing: $(\# i : 0\leq i < n+1 : R) = (\# i : 0\leq i < n : R)$, als $\neg(R(i := n))$
$(\# i : 0\leq i < n+1 : R) = (\# i : 0\leq i < n : R) + 1$, als $R(i := n)$

en ook: $(\# i : 0\leq i < n+1 : R) = (\# i : 0\leq i < n : R(i := i+1))$, als $\neg(R(i := 0))$
$(\# i : 0\leq i < n+1 : R) = 1 + (\# i : 0\leq i < n : R(i := i+1))$, als $R(i := 0)$

domein-term trading

$$(\forall i : P\wedge Q : R) = (\forall i : P : Q \Rightarrow R)$$
$$(\exists i : P\wedge Q : R) = (\exists i : P : Q\wedge R)$$
$$(\# i : P\wedge Q : R) = (\# i : P : Q\wedge R)$$